Calcul de l'angle de corroyage pour des pieds inclinés

On se place dans le référentiel orthonormé formé par les trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ d'origine O. On a ainsi

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

On note θ l'angle d'inclinaison du pied par rapport aux deux plans $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$ et $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. On place un point D tel que le vecteur $\overrightarrow{OD}$ corresponde à l'inclinaison du pied si bien que

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -\tan\theta \\ -\tan\theta \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

On appelle les plans $\Pi_1 = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OD})$ et $\Pi_2 = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{OD})$. L'angle α qui nous intéresse est défini par les deux vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ appartenant respectivement à Π_1 et Π_2 et orthogonaux à $\overrightarrow{OD}$.

Calcul de $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$

On cherche tout d'abord un vecteur $\overrightarrow{n_{\Pi_1}}$ orthogonal au plan Π_1 tel que

$$\overrightarrow{n_{\Pi_1}}.\overrightarrow{u} = 0 \tag{3}$$
$$\overrightarrow{n_{\Pi_1}}.\overrightarrow{OD} = 0. \tag{4}$$

En notant

$$\overrightarrow{n_{\Pi_1}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \tag{5}$$

l'équation 3 impose $a = 0$ et l'équation 4 donne $c = b\tan\theta$. On obtient ainsi en choisissant $b = 1$

$$\overrightarrow{n_{\Pi_1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \tan\theta \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ vérifie

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_{\Pi_1}} = 0 \\ \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{OD} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

En posant

$$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{8}$$

on a

$$\begin{cases} y + z\tan\theta = 0 \\ -x\tan\theta - y\tan\theta + z = 0. \end{cases} \tag{9}$$

En choisissant $z = 1$, on obtient finalement

$$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} \\ -\tan\theta \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Avec le même raisonnement, on trouve

$$\overrightarrow{n_2} = \left(\begin{array}{c} -\tan\theta \\ \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} \\ 1 \end{array} \right). \tag{11}$$

Calcul de α

L'angle α vérifie par construction

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n1}.\overrightarrow{n2}}{\left\|\overrightarrow{n1}\right\| \left\|\overrightarrow{n2}\right\|}. \tag{12}$$

Finalement on obtient

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1 + 2\tan^2\theta}{3 + 2\tan^2\theta + \tan^{-2}\theta}\right) \tag{13}$$